TD n°11: Fonctions harmoniques

Analyse complexe 2025-2026, Thomas Serafini
tserafini@dma.ens.fr

Les exercices marqués d'un [†] sont à faire en priorité, ceux marqués d'un [†] sont des exercices complémentaires, à faire pour aller plus loin.

Fonctions harmoniques.

Exercice 1. Retour sur le noyau de Poisson.

1. Démontrer que le noyau de Poisson

$$P(z,\zeta) = \Re\left(\frac{\zeta+z}{\zeta-z}\right) = \frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2}$$

   est donné par

$$P(re^{it}, e^{i\theta}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{ni(t-\theta)}$$

   et utilisez cette formule pour redémontrer que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z,\zeta)d\theta = 1.$$

2. Soit $\phi \in L^1(\mathbb{U},\mathbb{R})$ une fonction intégrable sur le cercle. Démontrez que pour $r<1$, on a

$$P_{\mathbb{D}}\phi(re^{it}) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n r^{|n|} e^{nit}$$

   où les $(a_n)_n$ sont une suite bornée de nombres complexes vérifiant $a_{-n} = \overline{a}_n$, que l'on explicitera.

3. Supposons à présent que ϕ est continue à valeurs complexes, et notons, pour $\zeta \in \mathbb{U}$, $\phi_r(\zeta) = P_{\mathbb{D}}\phi(r\zeta)$. Démontrer que $\phi_r \to \phi$ uniformément et en déduire le théorème de Stone-Weierstrass pour le cercle.

Exercice 2. Le problème de Dirichlet holomorphe.

1. Démontrer qu'il n'existe pas de fonction holomorphe sur le disque unité $\mathbb{D}$ qui s'étend en une fonction continue valant $\zeta \mapsto \overline{\zeta}$ sur le cercle.

2. De manière générale, soit ϕ une fonction continue sur le cercle unité $\mathbb{U}$. Démontrer qu'une condition nécessaire pour qu'il existe une fonction holomorphe f sur $\mathbb{D}$ qui se prolonge en ϕ au bord est

$$\int_0^{2\pi} \phi(e^{i\theta})e^{ni\theta}d\theta = 0$$

   pour tout $n \geqslant 1$.

3. Démontrer que cette condition est suffisante. On pourra construire séparément les parties réelle et imaginaire de la fonction recherchée.

Exercice 3. Gradient d'une fonction harmonique positive.

1. Soit f une fonction holomorphe. Démontrer que le gradient de $\Re(f)$ est $\overline{f'}$ (vue comme application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$).

2. Démontrer que le noyau de Poisson vérifie, pour $|z|<1$, $|\zeta|=1$:

$$|\nabla_z P(z,\zeta)| = \frac{2}{1-|z|^2}P(z,\zeta).$$

[†]Merci à Hadrien et Louise pour ce phoque et ce raton-laveur en Tikz.

3. En déduire que si u est une fonction harmonique positive sur $\mathbb{D}(0,\rho)$, elle vérifie pour tout $z \in \mathbb{D}(0,\rho)$ l'inégalité
$$|\nabla u(z)| \leqslant \frac{2\rho}{\rho^2 - |z|^2} u(z).$$

4. Soit U un ouvert simplement connexe quelconque de $\mathbb{C}$, $z \in U$. On rappelle qu'il existe un unique biholomorphisme $\varphi : \mathbb{D} \to U$ qui envoie 0 sur z et a une dérivée réelle positive, on note $R(U,z)$ cette dérivée positive. Démontrer que si u est une fonction harmonique positive sur U, alors
$$|\nabla u(z)| \leqslant \frac{2}{R(U,z)} u(z).$$

Exercice 4. Récupération d'une fonction holomorphe depuis sa partie réelle.
Soit f une fonction holomorphe au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$, u sa partie réelle. Démontrer que pour $z \in \mathbb{D}$, on a
$$f(z) = i\Im f(0) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} u(e^{i\theta}) d\theta.$$

Exercice 5. Harmonicité d'un produit.
Soient u, v des fonctions harmoniques non-constantes sur un ouvert connexe U. Démontrer que uv est harmonique si et seulement s'il existe une constante a telle que $u + iav$ est holomorphe sur U. On pensera à écrire $\Delta = 4\partial\overline{\partial}$.

Exercice 6. Invariance par biholomorphismes.
Soient U, V deux ouverts de $\mathbb{C}$, $\varphi : U \to V$ un biholomorphisme entre ces deux ouverts. Pour $u \in C^2(V, \mathbb{R})$, démontrer que
$$\Delta(u \circ \varphi) = (\Delta u) \circ \varphi \cdot |\varphi'|^2.$$
et en déduire la précomposition par un biholomorphisme préserve les fonctions harmoniques et sous-harmoniques.

Exercice 7. Fonctions harmoniques sur des anneaux.
Soit A l'anneau $r < |z| < R$, et u une fonction harmonique sur A. On va démontrer que u est de la forme $\Re f(z) + \alpha \log|z|$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Soit $g = 2\partial u$. Démontrer que g est holomorphe.
2. Démontrer qu'il existe une constante $\alpha \in \mathbb{C}$, pour laquelle on donnera une formule intégrale, telle que $g(z) - \frac{\alpha}{z}$ admette une primitive f sur A.
3. Démontrer que $\alpha \in \mathbb{R}$.
4. Démontrer que $u = \Re(f) + \alpha \log|z| + C$ pour une certaine constante C.

Exercice 8. Fonctions pluriharmoniques
On a vu dans un TD précédent qu'une fonction harmonique sur $\mathbb{C}^n$ n'est pas nécessairement, même pas localement, la partie réelle d'une fonction holomorphe (c'est-à-dire une fonction $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ qui vérifie $\partial_j f = 0$ pour tout j).
Une fonction $u : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ est dite pluriharmonique si elle vérifie $\partial_j \overline{\partial}_k u = 0$ pour tous j, k, où
$$\partial_j = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right),\ \overline{\partial}_j = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right).$$
où x_j, y_j désignent les parties réelles et imaginaires des coordonnées $z_1, ..., z_n$ sur $\mathbb{C}^n$.

1. Démontrer que la partie réelle d'une fonction holomorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$ est pluriharmonique.
2. Soit $\boldsymbol{f} = (f_1, ..., f_n)$ un champ de vecteurs C^0 sur un ouvert convexe U de $\mathbb{R}^n$. Supposons qu'il vérifie $\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}$ pour tous j, k. Démontrer que la fonction définie sur U
$$F : (x_1, ..., x_n) \mapsto \int_0^{x_1} f_1(t, x_2, ..., x_n) dt$$
vérifie $\nabla F = \boldsymbol{f}$.

3. Démontrer que si u est pluriharmonique sur un voisinage de 0 de la forme $|z_i| < r_i$, alors en identifiant $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{R}^{2n}$, le champ de vecteurs

$$\boldsymbol{f}_u = \left(-\frac{\partial u}{\partial y_1}, \frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., -\frac{\partial u}{\partial y_n}, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

vérifie la condition de la question précédente. On pensera à calculer $\Re(\partial_j \overline{\partial}_k u)$ et $\Im(\partial_j \overline{\partial}_k u)$.
On note v une fonction telle que $\nabla v = \boldsymbol{f}_u$, qui existe bien car les polydisques (définis par $|z_i| < r_i$) sont convexes.

4. Vérifier que $\overline{\partial}_j v = i\overline{\partial}_j u$ pour tout j et en déduire que $u + iv$ est holomorphe.

Fonctions sous-harmoniques.

Exercice 9. Inégalité de la moyenne et principe du maximum pour les fonctions sous-harmoniques C^2.
Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $u \in C^2(U, \mathbb{R})$. On dit que u est (strictement) sous-harmonique si $\Delta u \geqslant 0$ (respectivement $\Delta u > 0$).

1. Soit $u \in C^2(U, \mathbb{R})$, $z \in U$, $\rho > 0$ tel que $\mathbb{D}(0, \rho) \subseteq U$. Démontrer que pour $r < \rho$, on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta}) d\theta = u(z) + \frac{r^2}{4} \Delta u(z) + o(r^2)$$

et en déduire que les fonctions strictement sous-harmoniques vérifient l'inégalité de la moyenne locale : pour tout $z \in U$, il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $r < \rho$, on a

$$u(z) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + re^{i\theta}) d\theta.$$

2. Soit u une fonction sous-harmonique. En considérant $z \mapsto u(z) + \varepsilon |z|^2$, démontrer que u satisfait l'inégalité de la moyenne.

3. On va exploiter cette propriété pour démontrer que les fonctions sous-harmoniques vérifient le principe du maximum.
   (a) Soit u sous-harmonique sur U connexe. Démontrer que si u admet un maximum global, alors elle est constante.
   (b) Soit $K \subseteq U$ compact. Démontrer que u atteint son maximum sur K au bord de K.
   (c) Supposons que U est borné, et que $\limsup_{z \to \zeta} u(z) \leqslant 0$ pour tout $\zeta \in \partial U$: démontrer que $u \leqslant 0$ sur U.

4. Soit $\overline{\mathbb{D}}(z, \rho) \subseteq U$. Démontrer que

$$u \leqslant P_{\mathbb{D}(z,\rho)} \left(u|_{\partial \mathbb{D}(z,\rho)}\right)$$

sur $\mathbb{D}(z, \rho)$ et en déduire que u vérifie l'inégalité de la moyenne globale, c'est-à-dire que si $\overline{\mathbb{D}}(z, \rho) \subseteq U$ alors

$$u(z) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + \rho e^{i\theta}) d\theta.$$

Exercice 10. Potentiel d'une mesure.
Soit μ une mesure de Radon sur $\mathbb{C}$. On dit qu'une fonction $p \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{C})$ est un potentiel de μ si $\Delta p = \mu$ au sens des distributions, c'est-à-dire que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$, on a

$$\int_{\mathbb{C}} p(z) \Delta \varphi(z) d\lambda(z) = \int_{\mathbb{C}} \varphi(z) d\mu(z).$$

1. Trouver un potentiel de la mesure de Lebesgue.
On rappelle que pour tout $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{C})$, on a :

$$\int_{\mathbb{C}} \log |z| \Delta \varphi(z) d\lambda(z) = 2\pi \varphi(0)$$

2. Trouver un potentiel de la masse de dirac δ_w en w.

3. Si μ est à support compact, on définit

$$U_\mu(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{C}} \log |z - w| d\mu(w).$$

   Démontrer que U_μ (qui peut valoir $-\infty$ en certains points) est un potentiel de μ, et qu'elle est harmonique sur $\mathbb{C} \setminus \mathrm{Supp}(\mu)$.

4. Démontrer que pour $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\int_0^{2\pi} \log \left| z - e^{i\theta} \right| d\theta = 2\pi \log^+ |z|$$

   où $\log^+ t$ désigne $\max(\log(t), 0)$.

5. Démontrer que U_μ vérifie l'inégalité de la moyenne. Est-elle toujours de classe C^2 ?